

• قابلية الاشتقاق عند عدد حقيقي

f دالة معرفة على مجال مفتوح يشمل العدد الحقيقي x_0.
الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا و فقط إذا كانت نهاية الدالة $h \longmapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
عددا حقيقيا عندما h يؤول إلى 0.
هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 و يرمز له $f'(x_0)$.
نكتب $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ أو $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

• قابلية الاشتقاق على مجال - الدالة المشتقة لدالة

f دالة معرفة على مجال I.
- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا و فقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من المجال I.
- الدالة $f' : x \longmapsto f'(x)$ حيث $f'(x)$ هو العدد المشتق للدالة f' عند العدد x تسمى الدالة المشتقة للدالة f.

• معادلة المماس

f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد الحقيقي x_0.
$(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مماسا (T) عند النقطة A فاصلتها x_0.

معامل توجيه المماس (T) هو $f'(x_0)$.
معادلة المماس (T) هي : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

• التقريب التآلفي لدالة عند عدد حقيقي x_0

f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد x_0.
الدالة التآلفية g المعرفة كما يلي : $g : x \longmapsto f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
تسمى التقريب التآلفي المماسي للدالة f عند العدد x_0.

• قابلية الاشتقاق و الإستمرارية

f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد x_0.
إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإن f مستمرة عند x_0. (العكس غير صحيح).

• **الدوال المشتقة لدوال مألوفة**

الدالة...	معرفة على...	قابلة للاشتقاق على...	دالتها المشتقة هي...
$k \in \mathbb{R}$ ؛ $x \longmapsto k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 0$
$n \in \mathbb{Z}$ ؛ $x \longmapsto x^n$	$\mathbb{R}$، إذا كان $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$، إذا كان $n < 0$	$\mathbb{R}$، إذا كان $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$، إذا كان $n < 0$	$x \longmapsto nx^{n-1}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$]0 ; +\infty[$	$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longmapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto \cos x$
$x \longmapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto -\sin x$
$x \longmapsto \tan x$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}$

• **العمليات الجبرية**

f، g دالتان معرفتان على نفس المجال I ؛ k عدد حقيقي.

إذا كانت f و g قابلتين للاشتقاق على المجال I فإن :

• الدالة $f+g$ قابلة للاشتقاق على I و $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

• الدالة $k.f$ قابلة للاشتقاق على I و $(k.f)'(x) = k.f'(x)$

• الدالة $f.g$ قابلة للاشتقاق على I و $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

• الدالة $\frac{1}{g}$ قابلة للاشتقاق على I حيث $g(x) \neq 0$ و $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$

• الدالة $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق على I حيث $g(x) \neq 0$ و $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$

• **الدالة المشتقة لدالة مركبة**

f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد x_0، g دالة معرفة على مجال J يشمل $f(x_0)$.

• إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 و g قابلة للاشتقاق عند $f(x_0)$ فإن الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق عند x_0

و $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0).g'[f(x_0)]$

• **حالات خاصة**

f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I ؛ n عدد صحيح.

• الدالة $g : x \longmapsto [f(x)]^n$ قابلة للاشتقاق على I (حيث $f(x) \neq 0$ من أجل $n < 0$)

و $g'(x) = n.f'(x).[f(x)]^{n-1}$

• الدالة $h : x \longmapsto \sqrt{f(x)}$ قابلة للاشتقاق على I (حيث $f(x) > 0$) و $h'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

• إتجاه تغيرات دالة

f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I.

• إذا كان من أجل كل عدد x من I، $f'(x) = 0$ فإن الدالة f ثابتة على I.

• إذا كان من أجل كل عدد x من I، $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) = 0$ من أجل قيم معزولة من I) فإن الدالة f متزايدة تماما على I.

• إذا كان من أجل كل عدد x من I، $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) = 0$ من أجل قيم معزولة من I) فإن الدالة f متناقصة تماما على I.

• النقط الحدية لمنحن

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I يشمل العدد x_0.

$(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم.

• إذا كانت f تقبل قيمة حدية محلية عند x_0 فإن $f'(x_0) = 0$.

• إذا كانت f' تنعدم عند x_0 و تغير إشارتها فإن f تقبل قيمة حدية محلية عند x_0 (العدد $f(x_0)$ هو قيمة عظمى أو قيمة صغرى للدالة f عند x_0 من I).

في هذه الحالة النقطة ذات الإحداثيين $(x_0 ; f(x_0))$ تسمى نقطة حدية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

• المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند نقطة حدية فاصلتها x_0، يوازي محور الفواصل و معادلته هي $y = f(x_0)$.

• الدوال المشتقة المتتابعة

f دالة قابلة للاشتقاق n مرة على مجال I حيث $n \geq 1$.

f' دالتها المشتقة من المرتبة 1 ؛ $f^{(2)} = f'' = (f')'$ دالتها المشتقة من المرتبة 2 ؛ ...

$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ دالتها المشتقة من المرتبة n.

نضع : $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$ أو $y' = \dfrac{dy}{dx}$ ؛ $f''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df}{dx}\right) = \dfrac{d^2f}{dx^2}$ ؛ $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^nf}{dx^n}$

• نقطة إنعطاف منحنى

f دالة معرفة على مجال I و قابلة للاشتقاق مرتان على I. x_0 ينتمي إلى I. $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم.

• إذا كانت الدالة f'' تنعدم و تغير الإشارة عند x_0 فإن النقطة A ذات الفاصلة x_0 تسمى نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f.

• المماس عند النقطة A يقطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ فيها.

• المعادلات التفاضلية

f دالة مألوفة، مستمرة على مجال I.

• لحل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ أو $y'' = f(x)$

• نبحث عن الدوال g القابلة للاشتقاق مرّة أو مرتين على I حيث $g'(x) = f(x)$ أو $g''(x) = f(x)$.

• حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال $x \longmapsto g(x)$.

• لحل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ أو $y'' = f(x)$ نستعين بجدول الدوال المشتقة لدوال مألوفة.

• مخطط لدراسة دالة

يمكن تنظيم دراسة دالة f حسب المخطط التالي :

• نعين مجموعة التعريف (تبسيط عبارة $f(x)$ عند الضرورة).

• نعين مجموعة دراسة الدالة : خواص هندسية للمنحنى (دالة فردية، دالة زوجية، دالة دورية).

• نحسب النهايات عند حدود مجموعة الدراسة.

• ندرس الاستمرارية، الاشتقاق، التغيرات :

نحسب الدالة المشتقة، ندرس إشارتها ثم نستنتج اتجاه تغير الدالة.

• ندرس الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة.

• نرسم التمثيل البياني بعد تعليم بعض النقط الخاصة (مركز تناظر، نقطة إنعطاف، ...) و بعض المستقيمات الخاصة (محور تناظر، مستقيمات مقاربة، مماسات، ...).

• نستفيد من الخواص البارزة لانجاز الرسم (عناصر التناظر، ...).

طرائــق

1 دراسة قابلية اشتقاق دالة عند عدد حقيقي و تعيين العدد المشتق

تمرين

• أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد الحقيقي x_0 ثم عين العدد المشتق $f'(x_0)$ عند وجوده في كل حالة من الحالات التالية :

1. $f(x) = x^2 - 2x - \sin x$ ؛ $x_0 = 0$
2. $f(x) = (2x - 3)^2$ ؛ $x_0 = -1$
3. $f(x) = x^2 + |x|$ ؛ $x_0 = 0$
4. $f(x) = \sqrt{x}$ ؛ $x_0 = 0$
5. $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ ؛ $x_0 = 1$

حل

1 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = x^2 - 2x - \sin x$ عند العدد 0.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ (لأن f مجموع دوال معرفة على $\mathbb{R}$) و $f(0) = 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ، $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - 2x - \sin x}{x} = x - 2 - \frac{\sin x}{x}$

و $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0}\left(x - 2 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0 - 2 - 1 = -3$. إذن $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -3$

بما أن نهاية النسبة $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ عندما x يؤول إلى 0 هي عدد حقيقي، فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند الغدد 0 و العدد المشتق للدالة f عند 0 هو $f'(0)$ حيث $f'(0) = -3$.

2 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = (2x - 3)^2$ عند 1-.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ لأنها مربع دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و $f(-1) = 25$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1-.

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{(2x - 3)^2 - 25}{x + 1} = \frac{(2x - 8) \times 2(x + 1)}{x + 1} = 4x - 16$$

لدينا $\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} (4x - 16) = -20$. إذن $\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = -20$

بما أن نهاية النسبة $\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$ عند ما يؤول x إلى 1- هي عدد حقيقي، فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1- و $f'(-1) = -20$.

3 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = x^2 + |x|$ عند العدد 0.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ (مجموع دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$) و $f(0) = 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ، $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 + |x|}{x} = x + \frac{|x|}{x}$

نعلم أن $|x| = x$ إذا كان $x \geq 0$ و $|x| = -x$ إذا كان $x \leq 0$.

إذن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(x + \frac{x}{x}\right) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x+1) = 1$

و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \left(x - \frac{x}{x}\right) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} (x-1) = -1$

بما أن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

فإن النسبة $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ لا تقبل نهاية عند العدد 0.

و بالتالي الدالة f حيث $f(x) = x^2 + |x|$ غير قابلة الاشتقاق عند العدد 0 مع الملاحظة أن f قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليمين و $f'(0) = 1$ و قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليسار و $f'(0) = -1$

4 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \sqrt{x}$ عند 0.

الدالة f معرفة عند 0 و $f(0) = 0$.

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

لدينا $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{x} = 0$. إذن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

و بالتالي $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$. هذه النهاية ليست عددا حقيقيا.

ينتج أن الدالة f حيث $f(x) = \sqrt{x}$ غير قابلة للاشتقاق عند 0.

4 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f حيث $f(x) = \frac{1}{x-1}$، عند 1.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$.

بما أن الدالة f غير معرفة عند العدد 1 فإنها غير قابلة للاشتقاق عند العدد 1.

2 تعيين معادلة مماس للمنحنى الممثل لدالة عند نقطة منه فاصلتها x_0

تمرين

• في كل حالة من الحالات التالية، حدد إن كان المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f يقبل مماسا أو نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0. عين معادلة لهذا المماس عند وجوده.

1 • $f(x) = 3x^2 - x - 2$ ؛ $x_0 = 1$

2 • $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ ؛ $x_0 = 2$

3 • $f(x) = |x^3 - 1|$ ؛ $x_0 = 1$

4 • $f(x) = \cos x$ ؛ $x_0 = \frac{\pi}{4}$

حل

1 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = 3x^2 - x - 2$ عند العدد 1.
الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و $f(1) = 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} = \frac{(3x + 2)(x - 1)}{x - 1} = 3x + 2$$

لدينا أيضا $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (3x + 2) = 5$

بما أن $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ هي عدد حقيقي فإن f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1) = 5$.

ينتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 1، معادلته $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

لدينا $f(1) = 0$ و $f'(1) = 5$. إذن معادلة المماس هي $y = 5x - 5$.

2 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ عند العدد 2.
الدالة f معرفة عند كل عدد حقيقي x حيث $x^2 - x - 2 \geq 0$.
2 و 1- هما جذرا ثلاثي الحدود $x^2 - x - 2$.
إذن مجموعة تعريف الدالة f هي $]-\infty ; -1] \cup [2 ; +\infty[$ و $f(2) = 0$.
لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]2 ; +\infty[$ ؛

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2} = \frac{\sqrt{(x + 1)(x - 2)}}{x - 2} = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}}$$

لدينا $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}} = +\infty$

بما أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ ليست عددا حقيقيا فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد 2.

ينتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل نصف مماس يوازي محور التراتيب معادلته $x = 2$ مع $x \geq 2$.

3 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = |x^3 - 1|$ عند العدد 1.
الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و $f(1) = 0$.
لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{|x^3 - 1| - 0}{x - 1} = \frac{|x^3 - 1|}{x - 1}$$

نلاحظ أن إذا كان $x > 1$ فإن $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1$

و إذا كان $x < 1$ فإن $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{-(x^3-1)}{x-1} = \frac{-(x-2)(x^2+x+1)}{x-1} = -(x^2+x+1)$

ينتج أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} (x^2+x+1) = 3$

و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} [-(x^2+x+1)] = -3$

نلاحظ أن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ هما عددان حقيقيان مختلفان إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 1 عن اليمين و عن اليسار و ليست قابلة للاشتقاق عند العدد 1 -.

و بالتالي المنحى $(\mathscr{C})$ يقبل نصف مماس (Δ_1) عن اليمين و نصف مماس (Δ_2) عن اليسار عند النقط من $(\mathscr{C})$ ذات الفاصلة 1.

• إيجاد معادلة نصف المماس (Δ_1).

لدينا $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ حيث $f'(1) = 3$. أي $y = 3(x-1)+0$.

إذن $(\Delta_1) : y = 3x-3$ حيث $x \geq 1$.

• إيجاد معادلة نصف المماس (Δ_2).

لدينا $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ حيث $f'(1) = -3$.

أي $y = -3(x-1)+0$.

إذن $(\Delta_2) : y = -3x+3$ حيث $x \leq 1$.

3 • دراسة قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \cos x$ عند العدد $\frac{\pi}{4}$.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\frac{\pi}{4}$ ؛

$$\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}} = \frac{-2\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = \frac{-\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)}{\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

لدينا $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)}{\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)} = -1$

إذن $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ينتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد $\frac{\pi}{4}$ و $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و بالتالي المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\pi}{4}$ معادلته $y = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

أي $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$. ينتج أن $(\Delta) : y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$

3 تعيين الدالة المشتقة لدالة

تمرين

• عين مجموعة تعريف كل دالة f من الدوال التالية ثم مجموعة قابلية الاشتقاق و الدالة المشتقة لها.

1 • $f(x) = x^2 + x + \frac{3}{x}$

2 • $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 1}$

3 • $f(x) = x + 3\sqrt{x^2 - 1}$

4 • $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$

5 • $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$

6 • $f(x) = \sqrt{2(1 - \cos x)}$

7 • $f(x) = (5x^2 - x)^3$

8 • $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

حل

1 • تعيين الدالة المشتقة للدالة f حيث : $f(x) = x^2 + x + \frac{3}{x}$.

الدالة f معرفة على $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $]0 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ، $f'(x) = 2x + 1 - \frac{3}{x^2}$.

2 • تعيين الدالة المشتقة للدالة f حيث : $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 1}$.

الدالة f معرفة على $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty ; 1[$ و $]1 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1، $f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x - 1)^2}$

3 • تعيين الدالة المشتقة للدالة f حيث : $f(x) = x + 3\sqrt{x^2 - 1}$.

الدالة f معرفة على $]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty ; -1[$ و $]1 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x من المجموعة $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ $f'(x) = 1 + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

4 • تعيين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$.

الدالة f معرفة على $]-\infty ; -1 - \sqrt{2}] \cup [-1 + \sqrt{2} ; +\infty[$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-1 + \sqrt{2} ; +\infty[$ و $]-\infty ; -1 - \sqrt{2}[$

و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty ; -1 - \sqrt{2}[\cup]-1 + \sqrt{2} ; +\infty[$ ؛ $f'(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$.

5 • تعيين الدالة المشتقة للدالة f حيث : $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$.

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x$

6 • تعيين الدالة المشتقة للدالة f حيث : $f(x) = \sqrt{2(1 - \cos x)}$.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $1 - \cos x \geq 0$.

الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي x يختلف عن $2k\pi$

و من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $2k\pi$ ؛ $f'(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{2(1 - \cos x)}}$

7 • تعيين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = (5x^2 - x)^3$.

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

بوضع g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 5x^2 - x$

لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = 10x - 1$

نلاحظ أن $f(x) = [g(x)]^3$. إذن $f'(x) = 3 \times g'(x) . g(x)^2$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 3(10x - 1)(5x^2 - x)^2$.

8 • تعيين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2x + \dfrac{\pi}{3}$

و h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = \sin x$ ينتج أن $f = h \circ g$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) = 2$

و الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x) = \cos x$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g'(x) \times h'(g(x)) = 2 \times \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

إذن الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة f' المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f'(x) = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

4 دراسة إتجاه تغير دالة

تمرين

• ادرس إتجاه تغيرات كل دالة f من الدوال التالية المعرفة كما يلي :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$	3. $f(x) = 5x + 1 + \frac{1}{x}$
2. $f(x) = x + \sin x$	4. $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

حل

1 • دراسة تغيرات الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ (لأن من أجل كل عدد حقيقي x ، $x^2 + 2 > 0$).

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x موجب، $f'(x) \geq 0$. إذن الدالة f متزايدة على $[0 ; +\infty[$.

و من أجل كل عدد حقيقي x سالب، $f'(x) \leq 0$. إذن الدالة f متناقصة على $]-\infty ; 0]$.

2 • دراسة تغيرات الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = x + \sin x$.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 1 + \cos x$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $1 + \cos x \geq 0$.

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) \geq 0$. ينتج أن الدالة متزايدة على $\mathbb{R}$.

3 • دراسة تغيرات الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = 5x + 1 + \frac{1}{x}$.

الدالة f معرفة على المجموعة $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $]0 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ، $f'(x) = 5 - \frac{1}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ ملخصة في الجدول المقابل.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{5}}{5}$		0		$\frac{\sqrt{5}}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	

الدالة f متزايدة على كل من المجالين

$\left]-\infty ; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$ و $\left[\frac{\sqrt{5}}{5} ; +\infty\right[$

و متناقصة على كل من المجالين $\left[-\frac{\sqrt{5}}{5} ; 0\right[$ و $\left]0 ; \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$.

4 • دراسة تغيرات الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = x - 2\sqrt{x}$.

الدالة f معرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ و قابلة للاشتقاق على المجال $]0 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

إشارة $f'(x)$ ملخصة في الجدول المقابل :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة على المجال $]0 ; 1]$

و متزايدة على المجال $[1 ; +\infty[$.

5 إيجاد القيم الحدية لدالة

تمرين

• عين القيم الحدية لكل دالة من الدوال f المعرفة كما يلي :

1 • $f(x) = - x^4 + 2x^2 + 1$

2 • $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$

3 • $f(x) = x - 2\sqrt{x - 2}$

حل

1 • تعيين القيم الحدية للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = - x^4 + 2x^2 + 1$.

• الدالة f معرفة على المجال $]-\infty ; +\infty[$.

• الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = - 4x^3 + 4x$

$f'(x)$ يكتب على الشكل $f'(x) = 4x(1 - x)(1 + x)$

إشارة $f'(x)$ ملخصة في الجدول المقابل :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$(1 - x)(1 + x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	

• استنتاج القيم الحدية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الدالة f' تنعدم و تغير الإشارة عند كل من الأعداد -1 ، 0 ، 1

إذن الدالة f تقبل قيمة كبرى عند -1 على المجال $]-\infty ; 0]$ و هي $f(-1)$ حيث $f(-1) = 2$.

و الدالة f تقبل قيمة صغرى عند 0 على المجال $[-1 ; 1]$ و هي $f(0)$ حيث $f(0) = 1$

و الدالة f تقبل قيمة كبرى عند 1 على المجال $[0 ; +\infty[$ و هي $f(1)$ حيث $f(1) = 2$.

2 • تعيين القيم الحدية للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$.

• الدالة f معرفة على المجال $]-\infty ; +\infty[$ و قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty ; +\infty[$.

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 12x^2 - 3$

$f'(x)$ يكتب أيضا على الشكل : $f'(x) = 3(2x + 1)(2x - 1)$.

إشارة $f'(x)$ ملخصة في الجدول المقابل :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

• استنتاج القيم الحدية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الدالة f' تنعدم و تغير الإشارة عند $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$

إذن الدالة f تقبل قيمة كبرى على المجال $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$ و هي $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ حيث $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

و تقبل قيمة صغرى على المجال $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ و هي $f\left(\frac{1}{2}\right)$ حيث $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$.

3 • تعيين القيم الحدية للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = x - 2\sqrt{x-2}$.

• الدالة f معرفة على المجال $[2 ; +\infty[$.

• الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]2 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]2 ; +\infty[$ ؛ $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

$f'(x)$ يكتب أيضا على الشكل : $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x-2} - 1}{\sqrt{x-2}}$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]2 ; +\infty[$ هي إشارة $\sqrt{x-2} - 1$ على المجال $]2 ; +\infty[$.

إشارة $f'(x)$ على المجال $]2 ; +\infty[$ ملخصة في الجدول المقابل :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

الدالة f' تنعدم و تغير الإشارة عند 3

إذن الدالة f تقبل قيمة صغرى عند العدد 3 و هي $f(3)$ حيث $f(3) = 1$.

6 البحث عن الدوال المشتقة المتتابعة لدالة

تمرين 1

• عين الدالة المشتقة الثانية للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

• أثبت أن المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيين إحداثييها .

حل

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأن f دالة كثير الحدود)

و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 3x^2 - 6x$

الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = 6x - 6$

الدالة f'' تنعدم عند العدد 1 و تغير الإشارة إذن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف إحداثياها $(2 ; 1)$.

تمرين 2

• عين الدالة المشتقة من المرتبة n لكل من الدالتين sin و cos ؛ n عدد طبيعي غير منعدم .

حل

1 • تعيين الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة sin.

الدالة : sin قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، n مرة حيث $n \geq 1$.

و من أجل كل عدد حقيقي x ، $(sin)'(x) = cos\, x = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$(sin)''(x) = (cos\, x)'(x) = - sin\, x = sin\,(x + \pi) = sin\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right)$$

يمكن وضع التخمين التالي :

من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم، من أجل كل عدد حقيقي x ، $(sin)^{(n)}(x) = sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$

استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات صحة هذا التخمين.

من أجل $n = 1$ ؛ $(sin)^{(n)}(x) = sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$ أي $sin'(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

نفرض أن من أجل العدد الطبيعي k غير المنعدم ، $(sin)^{(k)}(x) = sin\left(x + k\,\frac{\pi}{2}\right)$.

• حساب $(sin)^{(k+1)}(x)$.

لدينا $(sin)^{(k+1)}(x) = \left[sin\left(x + k\,\frac{\pi}{2}\right)\right]' = cos\left(x + k\,\frac{\pi}{2}\right) = sin\left(x + (k+1)\,\frac{\pi}{2}\right)$

ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي k غير منعدم و من أجل كل عدد حقيقي x ،

إذا كان $(sin)^{(k)}(x) = sin\left(x + k\,\frac{\pi}{2}\right)$ فإن $(sin)^{(k+1)}(x) = sin\left(x + (k+1)\,\frac{\pi}{2}\right)$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ؛ $(sin)^{(n)}(x) = sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$

و بالتالي الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة sin هي الدالة $sin^{(n)}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$sin^{(n)}(x) = sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$.

2 • نبرهن بنفس الطريقة أن الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة cos هي الدالة $cos^{(n)}$ المعرفة على $\mathbb{R}$

كما يلي : $cos^{(n)}(x) = cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$.

8 حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ أو $y'' = f(x)$ حيث f دالة مألوفة

تمرين

• حل كل معادلة التفاضلية من المعادلات التالية :

1. $y' = 3x - 2$
2. $y' = sin\, x$
3. $y' = x + sin\, x$
4. $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$
5. $y' = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$
6. $y'' = 2$
7. $y'' = sin\, x$
8. $y'' = cos\, x$

حل

1 • حل المعادلة التفاضلية $y' = 3x - 2$.

نبحث عن الدوال العددية f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $f'(x) = 3x - 2$.

الدالة f حيث $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x$ تحقق المعالة التفاضلية $y' = 3x - 1$ لأن $f'(x) = 3x - 2$.

ينتج أن الدوال العددية حلول المعادلة التفاضلية $y' = 3x - 2$ هي الدوال f المعرفة كما يلي :

$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + c$ حيث c عدد حقيقي.

2 • حل المعادلة التفاضلية $y' = \sin x$.

نبحث عن الدوال العددية f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $f'(x) = \sin x$.

نعلم أن $\cos' x = -\sin x$

إذن $-\cos' x = \sin x$ أي $(-\cos)'(x) = \sin x$

و بالتالي الدالة $\cos$ - هي حل للمعادلة التفاضلية $y' = \sin x$. ينتج أن الدوال العددية حلول المعادلة التفاضلية $y' = \sin x$ هي الدوال f المعرفة كما يلي : $f(x) = -\cos x + c$ حيث c عدد حقيقي.

3 • حل المعادلة التفاضلية $y' = x + \sin x$.

باستعمال النتائج المحصل عليها في الحالتين السابقتين، تكون حلول المعادلة التفاضلية $y' = x + \sin x$ هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + c$

حيث c عدد حقيقي.

4 • حلول المعادلة التفاضلية $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ هي الدوال f المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

$f(x) = 2\sqrt{x} + c$ حيث c عدد حقيقي.

5 • حلول المعادلة التفاضلية $y' = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = 2\sqrt{x^2 + x + 1}$ حيث c عدد حقيقي.

6 • حلول المعادلة التفاضلية $y'' = 2$ هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = x^2 + cx + d$ حيث c و d عددان حقيقيان.

7 • حلول المعادلة التفاضلية $y'' = \sin x$ هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = -\sin x + cx + d$ حيث c و d عددان حقيقيان.

8 • حلول المعادلة التفاضلية $y'' = \cos x$ هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = -\cos x + cx + d$ حيث c و d عددان حقيقيان.

تمرين

• f هي الدالة المعرفة كما يلي : $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2}$

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و مجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 • عين مجموعة تعريف D للدالة f.

2 • أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^2}$

حيث a، b، c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

3 • عين نهايات الدالة f عند حدود المجموعة D.

4 • ادرس تغيرات الدالة f و انجز جدول تغيراتها.

5 • ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$.

6 • ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم المقارب (Δ) للمنحنى $(\mathscr{C})$.

7 • احسب $f(-1)$. ماذا تستنتجه ؟ ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم السابق.

8 • ناقش بيانيا ، عدد و إشارة حلول المعادلة $2x^3 + (1-m)x^2 + 1 = 0$ في $\mathbb{R}$

حسب قيم العدد الحقيقي m.

حل

1 • الدالة f معرفة على $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$. إذن $D =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

2 • من أجل كل عدد حقيقي x من D ،

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2} = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من D ؛ $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x^2}$ إذن $a = 2$ ؛ $b = 1$ ؛ $c = 1$

3 • تعيين نهايات الدالة f عند حدود المجموعة D.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(f هي مجموعة دالتين f_1 و f_2 حيث $f_1(x) = 2x + 1$ و $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$).

$\lim\limits_{x \to 0} (2x^3 + x^2 + 1) = 1$ و $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ و من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ؛ $x^2 > 0$

إذن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$ أي $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

4 • الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $]0 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ؛ $f'(x) = 2 - \dfrac{2}{x^3}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3} = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$$

دراسة إشارة $f'(x)$ على D.

من الجدول المقابل، ينتج أن الدالة f متزايدة على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $[1 ; +\infty[$ و متناقصة على المجال $]0 ; 1]$.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$x - 1$	-	‖	-	0	+
$x^2 + x + 1$	+	‖	+		+
x^3	-	‖	+		+
$f'(x)$	+	‖	-	0	+

جدول تغيرات الدالة يكون كالآتي :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗ $+\infty$	

نلاحظ أن النقطة ذات الإحداثيين $(1 ; 4)$ هي نقطة حدية صغرى للمنحنى $(\mathscr{C})$ على المجال $]0 ; +\infty[$.

5 • دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$، يوازي محور التراتيب.

من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم ؛ $f(x) - 2x - 1 = \frac{1}{x^2}$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (2x + 1)\right) = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - (2x + 1)\right) = 0$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$.

6 • دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم المقارب المائل (Δ).

دراسة إشارة العبارة $f(x) - (2x + 1)$ على D.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f(x) - (2x + 1) = \frac{1}{x^2}$

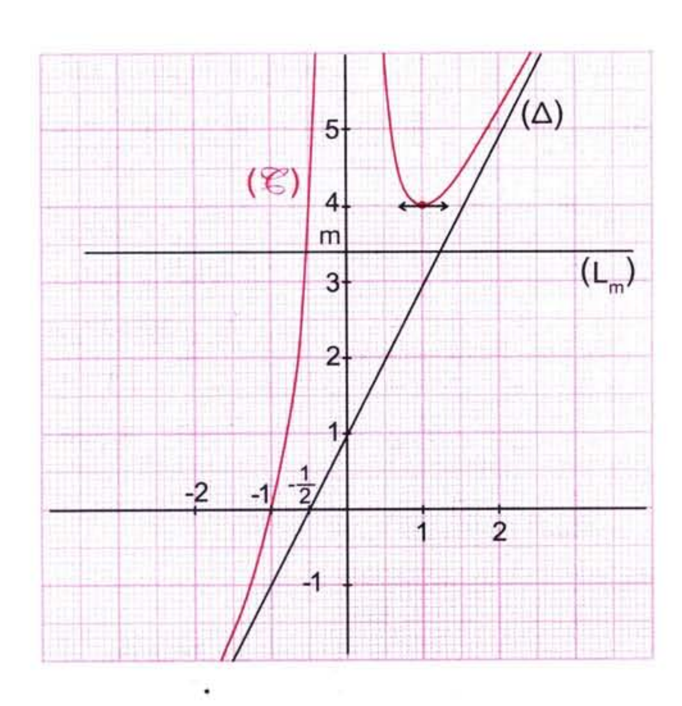
نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $\frac{1}{x^2} > 0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f(x) - (2x + 1) > 0$

ينتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ فوق المستقيم المقارب المائل (Δ).

7• $f(-1) = 0$. نستنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الإحداثيين $(-1 ; 0)$.

8 • رسم المنحنى $(\mathscr{C})$.



9 • مناقشة عدد و إشارة حلول المعادلة $2x^3 + (1-m)x^2 + 1 = 0$ في $\mathbb{R}$ بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m.

المعادلة $2x^3 + (1-m)x^2 + 1 = 0$ تكتب على الشكل $m = \dfrac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2}$ حيث x ينتمي إلى D.

أو أيضا $f(x) = m$ حيث x ينتمي إلى D.

معادلة المنحنى $(\mathscr{C})$ هي $y = f(x)$.

ليكن (L_m) المستقيم ذا المعادلة $y = m$ ؛ m عدد حقيقي.

حلول المعادلة $f(x) = m$ هي فواصل نقطة تقاطع $(\mathscr{C})$ و (L_m).

النتائج تلخص في الجدول الموالي :

m	$-\infty$	4	$+\infty$
النتائج	المعادلة تقبل حلا واحدا سالبا	المعادلة تقبل حلا سالبا و حلا مضعفا موجبا و هو 1.	المعادلة تقبل ثلاثة حلول : حل سالب و حلان مختلفان موجبان.

ابلية الاشتقاق - العدد المشتق

1 ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد x_0
عين العدد المشتق لها عند x_0 في كل حالة من
الات التالية :

- $x_0 = 1$ ؛ $f: x \longmapsto -\frac{x^2}{2} + 3x - 1$
- $x_0 = 5$ ؛ $f: x \longmapsto \frac{x+2}{-x+7}$
- $x_0 = -2$ ؛ $f: x \longmapsto 3x^5 - 4x^3 + 21$
- $x_0 = 0$ ؛ $f: x \longmapsto 2 - x + x \sin|x|$
- $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ؛ $f: x \longmapsto \cos x$
- $x_0 = 0$ ؛ $f: x \longmapsto (2x-3)^2$
- $x = 0$ ؛ $f: x \longmapsto x\sqrt{x}$
- $x_0 = 0$ ؛ $f: x \longmapsto |x|$

عادلة المماس

2 عين معادلة المماس (أو نصف مماس) للمنحنى
مثل للدالة f عند النقطة A ذات الفاصلة x_0
ي كل حالة من الحالات التالية :

- $x_0 = 3$ ؛ $f(x) = x^2 + x - 5$
- $f(x) = \sqrt{1-x}$ إذا كان $x < 1$
  $f(1) = 0$
  $f(x) = -\sqrt{x-1}$ إذا كان $x > 1$
  و $x_0 = 1$.
- $x_0 = 2$ ؛ $f(x) = |x^3 - 8|$
- $x_0 = 0$ ؛ $f(x) = \sqrt{x}$
- $x_0 = 2$ ؛ $f(x) = \sqrt{|x-2|}$
- $x_0 = 1$ ؛ $f(x) = x^2 + 2|x-1|$
- $x_0 = -2$ ؛ $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$

لدوال المشتقة

3 f دالة معرفة على مجموعة D.
ين المجموعة D و المجموعة D′ التي تقبل عليها f
لاشتقاق ثم عين الدالة المشتقة f' للدالة f
في كل حالة من الحالات التالية :

1. $f: x \longmapsto \frac{x^3 + x^2 + 3}{x}$
2. $f: x \longmapsto \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 2}$
3. $f: x \longmapsto \frac{3x^2 - 4x}{4(1-x)}$
4. $f: x \longmapsto \frac{x^3 + 4x^2 + x - 2}{(x+1)^2}$
5. $f: x \longmapsto \frac{x^2 + 3x + 6}{2(x+1)}$
6. $f: x \longmapsto 2x + 1 - \frac{2}{(1-x)^2}$
7. $f: x \longmapsto x + 3\sqrt{x^2 - 1}$
8. $f: x \longmapsto (x-1)\sqrt{2x}$
9. $f: x \longmapsto \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$
10. $f: x \longmapsto \frac{1}{4} - \left(\frac{2x+1}{4}\right)\cos \pi x$
11. $f: x \longmapsto \sqrt{\cos 2x}$
12. $f: x \longmapsto \frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin 2x}$

الإستمرارية و قابلية الاشتقاق

4 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = 1 - (x-1)\,|x-1|$$

- ادرس إستمرارية f عند العدد 1.
- ادرس قابلية اشتقاق f عند العدد 1.

5 f هي دالة معرفة كمايلي :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}$$

1. عين مجموعة تعريف الدالة f .
2. نعرف الدالة g كما يلي :

$g(x) = f(x)$ إذا كان $x \neq 0$ و $g(0) = 0$

هل الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

هل الدالة g مستمرة عند 0 ؟

إتجاه التغيرات

6 عين مجموعة تعريف الدالة f ثم أدرس إتجاه تغيراتها على هذه المجموعة في كل حالة من الحالات التالية :

1• $f(x) = x^3(1-x)^3$

2• $f(x) = x - 5\sqrt{x}$

3• $f(x) = \frac{3x^2 - x - 1}{x - 2}$

4• $f(x) = -x + 1 - \frac{4}{x^2}$

5• $f(x) = x + \sin x$

6• $f(x) = x - \tan x$

7• $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 4x^3$

8• $f(x) = \frac{2x - 5}{x + 1}$

9• $f(x) = \frac{x + 1}{2x - 5}$

10• $f(x) = 4x^3 - 6x^2$

الدوال المشتقة المتتابعة

7 f دالة معرفة كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x - 1}$

بين أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم، الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة عند كل عدد حقيقي يختلف عن 1.

عين، بدلالة n ؛ عبارة $f^{(n)}(x)$ من أجل x من $\mathbb{R} - \{1\}$.

8 عين الدوال المشتقة المتتابعة للدوال f في الحالات التالية :

1• $f : x \longmapsto x^5 - 2x^4 + x^2 - x + 1$

2• $f : x \longmapsto \frac{1}{2x - 1}$

3• $f : x \longmapsto \sin 2x$

9 f دالة معرفة كما يلي :

$f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

بين أن الدالة f تحقق المعادلة التفاضلية

$y'' + 9y = 0$

مسائل

10 f دالة معرفة كمايلي : $= \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$

(𝒞) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنس
إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1• ادرس تغيرات الدالة f .

2• أنجز جدول تغيرات الدالة f .

3• عين إحداثيي A نقطة تقاطع (𝒞) مع مح
الفواصل. ما هي معادلة المماس عند A ؟

4• بين أن النقطة A مركز تناظر المنحنى (𝒞)

5• ارسم المنحنى (𝒞) و المماس عند A.

الوحدة 2 cm.

11 أ) f دالة كثير الحدود معرفة على $\mathbb{R}$ كما يل

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

1• ادرس تغيرات الدالة f .

2• بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α
حيث $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$.

ب) g هي الدالة المعرفة على المجال $]1 ; +\infty[$
كما يلي : $g(x) = \frac{1 - x}{1 + x^3}$.

(𝒞) المنحنى الممثل للدالة g في المستوي المنسو
إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

الوحدة 4 cm.

1• ادرس تغيرات الدالة g (بإمكانك إستعمال
نتائج السؤال 1).

2• عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (𝒞) عند
النقطة A فاصلتها 0.

3• ادرس الوضع النسبي للمنحنى (𝒞) و المماس
(Δ) في المجال $]-1 ; 1[$. بين أن (𝒞) يقطع (Δ)
عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4• ارسم المنحنى (𝒞)، المماس (Δ) و المماس (T)
عند النقطة ذات الفاصلة 1.

12 f دالة معرفة كمايلي: $f(x) = \dfrac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$

• عين العددين a و b حتى يقبل المنحنى الممثل
للدالة f مماسا عند النقطة $O(0;0)$ يوازي
المستقيم (D) ذا المعادلة $y = 4x + 3$.
• ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم المنحنى $(\mathcal{C})$
الممثل لها بعناية في معلم متعامد و متجانس
مناسب $(O;\vec{i},\vec{j})$.

13 حل كل معادلة من المعادلات التفاضلية التالية:

1. $y' = 0$	6. $y'' = 0$
2. $y' = -5$	7. $y'' = \frac{1}{2}$
3. $y' = \sqrt{2}x - 1$	8. $y'' = x - 2$
4. $y' = \frac{3}{\sqrt{x}}$	9. $y'' = \frac{1}{2}x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
5. $y' = x - \cos 2x$	10. $y'' = \sin \frac{\pi}{3} x$

14 لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]a;+\infty[$
كما يلي : $f(x) = \dfrac{1}{x - a}$

1. احسب $f'(x)$ ؛ $f''(x)$ ؛ $f'''(x)$.
2. خمن عبارة $f^{(n)}(x)$ من أجل n عدد طبيعي
غير منعدم.
برهن بالتراجع، صحة هذا التخمين.
3. لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$
كما يلي : $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
عين عددين حقيقيين α و β حيث من أجل كل عدد
x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x) = \dfrac{\alpha}{x+1} + \dfrac{\beta}{x-1}$.
احسب $g^{(n)}(x)$ من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم.

15 المستوي منسوب إلى معلم متعامد
و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) • ارسم المنحى $(\mathcal{C}_g)$ الممثل للدالة g
المعرفة كما يلي : $g(x) = x^2 - x$

ب) • لتكن h الدالة المعرفة كما يلي :
$h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$
• احسب $h(1)$. حلل $h(x)$ إلى جداء عوامل.
• ادرس إشارة $h(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

2. نريد دراسة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$
كما يلي : $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 4}{x + 1}$.
ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل لها.

أ) • ادرس تغيرات الدالة f.

ب) • بين أن من أجل كل عدد حقيقي x
من $\mathbb{R} - \{-1\}$ ؛ $f(x) = ax^2 + bx + \dfrac{c}{x + 1}$
حيث a، b، c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

جـ) • ادرس الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathcal{C}_g)$ و $(\mathcal{C}_f)$.

د) • ارسم بعناية المنحنيين $(\mathcal{C}_g)$ و $(\mathcal{C}_f)$
في نفس المعلم.